Universidad de Santiago de Compostela: Grado en Física

MÉTODOS MATEMÁTICOS V: problemas propuestos

Temas 1: Curvas y superficies
y 2: Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Fecha límite de entrega: 17-11-2024 (Aula Virtual)

♣♣ 1) Sea $\vec{x} = \vec{\alpha}(s)$ una curva regular parametrizada por su longitud de arco cuya curvatura no se anula en ningún punto. Considerar la superficie tubular definida por la parametrización

$$\vec{x}(s,\theta) = \vec{\alpha}(s) + R\left(\vec{N}(s)\cos\theta + \vec{B}(s)\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\,, \qquad s \in (0,L)\,, \quad \theta \in (0,2\pi)\,,$$

donde $R > 0$ es una constante (el radio del tubo), y $\vec{N}(s), \vec{B}(s)$ son el vector normal principal y el vector binormal de la curva.

a) Dibujar (esquemáticamente) la superficie cuando la curva $\vec{\alpha}(s)$ es una hélice circular. *[Se sugiere dibujar la superficie utilizando la aplicación Geogebra o alguna similar].*

¿En el caso general, cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?:

i) La parametrización de la superficie es regular si la curva $\vec{\alpha}(s)$ es plana.

ii) La parametrización de la superficie es regular para cualquier valor de R.

iii) La parametrización de la superficie es regular para valores de R suficientemente grandes.

iv) La parametrización de la superficie es regular para valores de R suficientemente pequeños.

Justificar la respuesta.

b) En el caso particular de una curva $\vec{\alpha}(s)$ **plana**, calcular las curvaturas principales de la superficie y su curvatura gaussiana. Utilizarlas para clasificar los distintos puntos de la superficie.

Algunas fórmulas :

$$\dot{\vec{T}} = \kappa\vec{N}\,, \quad \dot{\vec{N}} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}\,, \quad \dot{\vec{B}} = -\tau\vec{N}\,, \quad \vec{T}\wedge\vec{N} = \vec{B}$$

$$\kappa = ||\vec{x}'\wedge\vec{x}''||/||\vec{x}'||^3, \quad \tau = \vec{x}'\cdot[\vec{x}''\wedge\vec{x}''']/||\vec{x}'\wedge\vec{x}''||^2\,.$$

$$E = \vec{x}_s\cdot\vec{x}_s\,, \quad F = \vec{x}_s\cdot\vec{x}_\theta\,, \quad G = \vec{x}_\theta\cdot\vec{x}_\theta\,,$$

$$l = \vec{x}_{ss}\cdot\vec{n}\,, \quad m = \vec{x}_{s\theta}\cdot\vec{n}\,, \quad n = \vec{x}_{\theta\theta}\cdot\vec{n}\,, \quad S_P = I_P^{-1}\Pi_P\,.$$

♣ 2) a) Determinar el valor de la constante real $\gamma(\lambda)$ para el que la función

$$y = \alpha\,\mathrm{sen}\,\left(\gamma(\lambda)\,x^2\right) + \beta\cos\left(\gamma(\lambda)\,x^2\right)$$

proporciona la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden

$$xy'' - y' + \lambda x^3 y = 0 \tag{0.1}$$

cuando $\lambda > 0$. Construir la solución general (real) para $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$.

b) Encontrar los autovalores y autofunciones del problema de contorno definido por la ecuación (0.1) y las condiciones

$$y(0) = 0\,, \qquad y'(1) = 0\,.$$

c) Escribir la ecuación diferencial en la forma de Sturm-Liouville y deducir las propiedades de ortogonalidad que cumplen las autofunciones del problema de contorno.

♣ 3) a) Resolver el problema de contorno (no homogéneo)

$$\cot(x)\, y'' + y' = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = \sqrt{5}$$

para cualquier elección de la función $f(x)$ utilizando el método de la función de Green.

b) Obtener la solución explícita para el caso particular $f(x) = \cos^2 x$ y comprobarla.